

على المترشح اختيار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

من اجل العدد الطبيعي n نعرف المعادلة (E_n) التالية: $645x - 195y = 13^n - 54n - 1$ ، حيث x و y عددين صحيحين.

1. (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15 .

(ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها العدد المعادلة (E_n) تقبل حلول.

2. تحقق ان الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2) .

3. عين العددين الطبيعيين α و β علما انه في النظام ذي الأساس 6، العدد a يكتب على الشكل $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$

ويكتب على الشكل $\beta 0444$ في النظام ذي الأساس 5.

4. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; I; J; K)$

(أ) أثبت ان مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $(3x - y - 12z)^2 + (x - y - 90z + 2)^2 = 0$ هي

لمستقيم (Δ) . ثم اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يحوي (Δ) ويشمل النقطة $A(1; 3; 0)$.

(ب) بين ان احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم استنتج مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من المستقيم

(Δ) التي احداثياتها اعداد صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) dx$$

1- باستعمال البرهان بالتراجع بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

$$2- (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (-1)^n \frac{e^{-\pi} + 1}{2} e^{-n\pi}$$$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

$$3- من اجل العدد طبيعي n نعرف المجموع S_n كما يلي : $S_n = 1 + \frac{u_1}{u_0} + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^n$$$

- اكتب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4 - عبر بدلالة n الجداء P_n المعروف على \mathbb{N} ب: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1- ليكن العدد المركب β بحيث: $\beta = 4\sqrt{2}(1+i)$

(أ) أكتب العدد β على الشكل الأسّي والمثلثي.

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة $(1) z^3 = \beta \dots$.

(ج) بين انه اذا كان z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة (1) فإن: $\frac{z_2 \times z_3}{(z_1)^2} = \frac{z_1 \times z_3}{(z_2)^2} = \frac{z_1 \times z_2}{(z_3)^2}$

2- لتكن النقط A, B, C, D, H التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = \alpha, z_B = e^{i2\pi} + \frac{\alpha-1}{\alpha}i$

$z_C = \alpha e^{i\frac{\pi}{2}}, z_D = -\frac{1}{\alpha}i$ و $z_H = 1 + z_D$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1.

(أ) تحقق ان: $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$ ثم بين ان: $iz_A \times z_D = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D) \right]^{2016}$

(ب) استنتج ان المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

(ج) بين انه يوجد تحويل نقطي f يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة C إلى D يطلب تعيين عناصره المميزة.

(د) بين ان المثلثين OAC و BHD متشابهان، ثم احسب مساحتهما.

3- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M ذات الاحقة z حيث: $\arg(\bar{z} + i\alpha) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k حيث عدد حقيقي موجب تماما.

I. g_k دالة معرفة على \mathbb{R} ب: $g_k(x) = 1 + (1+kx)e^{kx}$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g_k على \mathbb{R} مشكلا جدول تغيراتها.

2- استنتج اشارة $g_k(x)$ على \mathbb{R} .

II. f_k دالة معرفة على \mathbb{R} ب: $f_k(x) = x - 1 + xe^{kx}$.

(C_k) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O; I; J)$ حيث $\|i\| = 2cm$

1- (أ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيتها.

(ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$.

(ج) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تقبل مستقيم مقارب مانل (Δ) ثابت يطلب كتابة معادلته. ثم ادرس الوضع النسبي

للمنحني (C_k) و المستقيم (Δ) .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f_k على \mathbb{R} مشكلا جدول تغيراتها.

3- (أ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تقبل مماس (T) معادلته $y = 2x - 1$ عند الفاصلة x_0 يطلب تعيينها.

(ب) عين احداثيات I نقطة انعطاف للمنحنيات (C_k) .

4- (أ) بين ان المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

(ب) بين ان المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (Δ) تساوي $\frac{\alpha e^\alpha}{\sqrt{2}}$

5- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن: $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج؟

6- أنشئ كل من : (Δ) ، (T) ، (C_1) و (C_{-1}) في نفس المعلم

انتهى الموضوع الأول.

بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $6x+7y=57\dots(E)$

II. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I;J;K)$

المستويات (P_m) ذي المعادلة: $(m+1)x+(m+2)y+(m+3)z-57=0$ حيث $m \in \mathbb{R}$

1- أثبت ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في مستقيم (Δ) يطلب كتابة تمثيلا وسيطيا له.

2- ناقش حسب قيم الوسيط تقاطع المستويات (P_m) و سطح الكرة (S) ذو المعادلة: $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

3- ليكن المستقيم (D) تقاطع المستوي (P_5) مع المستوي (O,I,J)

(أ) بين انه توجد نقطة وحيدة من (D) احداثياتها أعداد طبيعية.

(ب) $N(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من المستوي (P_5) حيث x_0, y_0, z_0 أعداد طبيعية. بين ان $y_0 = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(ج) عين باقي قسمة العدد $(k+z_0)$ على 3

(د) p عدد طبيعي حيث : $3p = k+z_0-1$ بين ان : $x_0+k+4p=7$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد p .

(و) استنتج كل النقط N من المستوي (P_5) ذات الإحداثيات الطبيعية.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس U_1 يحتوي على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي غير معدوم) و 3 كرات سوداء .

كيس U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء.

كرات الكيسين متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

نعرف اللعبة التالية :نسحب عشوائيا من الكيس U_1 كرة واحدة ونضعها في الكيس U_2 ثم نسحب عشوائيا من الكيس U_2

كرة واحدة ونضعها في الكيس U_1 .

I. 1- احسب احتمال ان يسترجع الكيسين كرتاهم الإبتدائية.

2- ما هو احتمال ان تكون الكرة بيضاء واحدة فقط في الكيس U_2 .

II. نضيف الى اللعبة مايلي:

اللاعب يدفع $200DA$ قبل بداية اللعبة

اللاعب يتحصل على $DA \times 20$ اذا كان في الكيس U_2 كرة بيضاء واحدة.

اللاعب يتحصل على $DA \times 10$ اذا كان في الكيس U_2 كرتين بيضاوين .

اللاعب لا يتحصل على مبلغ اذا كان في الكيس U_2 3 كرات بيضاء.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بقيمة المبلغ المتحصل عليه (ربح أو خسارة)

1- أكتب قانون احتمال X . ثم احسب $E(X)$.

2- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ربح وخسارة اللاعب .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

I. m عدد حقيقي غير معدوم.

1- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E): z^3 - (4 + mi)z^2 + (13 + 4mi)z - 13mi = 0$

بين ان المعادلة (E) تقبل حلا تخيلا صرفا. ثم حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

2- لتكن النقطتان A و B التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = mi$ و $z_B = 2 + 3i$

أ) بين ان لاحقة C صورة B بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي: $z_C = \left(\frac{m-1}{2}\right) + i\left(\frac{5+m}{2}\right)$

ب) عين z_E لاحقة النقطة E صورة D لاحقتها $z_D = 5$ بالدوران R الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) اكتب العدد $\frac{z_D - z_A}{z_E - z_C}$ على الشكل الأسّي. ثم فسر النتيجة هندسيا

II. **نضع : $m = 1$**

1- نرفق بكل نقطة M ذات الاحقة Z حيث $Z \neq z_A$ النقطة M' ذات الاحقة Z' حيث $Z' = \frac{\bar{Z}(Z-i)}{Z+i}$

أ) اثبت انه اذا كان $Z \neq 0$ و $Z' \neq 0$ فإن: $\begin{cases} |Z'| = |Z| \\ \arg(Z') \equiv 2 \arg(Z-i) - \arg(Z) [2\pi] \end{cases}$

ب) بين انه اذا كان $|Z| = 1$ فإن $Z' = -i$

2- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M حيث Z' تخيلي صرف.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم.

$$f_n(x) = \begin{cases} x(1 - \ln x)^n; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

f_n دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

(C_n) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O; I; J)$. حيث $\|i\| = 2cm$

I. 1- أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين 0 .

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

2 - ادرس اتجاه تغير الدالتين f_1 و f_2 على \mathbb{R} مشكلا جدول تغيراتها.

3- أ) بين ان للمنحنى (C_2) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثم انشئ كل (C_1) و (C_2) من نفس المعلم.

.II نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty; 0]$ كما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

1- أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0]$ فان : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$
 ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $]-\infty; 0]$.

2- أ) بين انه من اجل كل $x \leq 0$ فان : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$

ب) بين انه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) = \frac{3}{4}$

.III (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

1- أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq 0$.

ب) ادرس اشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1; e]$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

2- أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

3- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

انتهى الموضوع الثاني.
 بالتوفيق