وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية بجاية
ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل

السنــة الدراسيــة : 2020/2019
المستوى : الثالثة علوم تجريبية
المـــدة : ساعتان

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول☺: (6 نقاط)

يحتوي صندوق U على 10 كـرات: 3 منها بيضاء و7 سوداء و يحتوي صندوق V على 10 كرات: 7 منها بيضاء و 3 سوداء(الكرات لا نفرق بينها باللمس) .

I) نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U: اذا كانت بيضاء نعيدها الى نفس الصندوق و نسحب منه عشوائيا 3 كرات في أن واحد. أما اذا كانت سوداء فنضعها في الصندوق V و نسحب منه عشوائيا 3 كرات على التوالي و بدون ارجاع. نعتبر الحادثتين:

A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق U.

B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

1) أحسب كل من: $P(A)$ و $P(B)$.

2) استنتج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء .

3) اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U.

II) نفرغ محتوى الصندوقين U و V في كيس غير شفاف و نضيف له n كرة حمراء $(n \geq 2)$.
نسحب عشوائيا من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع. نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n\ ;\ n-1\ ;\ n-2\}$.

2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

3) نضع $n=2$ ، احسب الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف للمتغير العشوائي X.

التمرين الثاني☺: (5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n \end{cases}.$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n \times u_n$.

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$، ثم اكتب v_n بدلالة n.

2) أ) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5.

ب) اكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ ، $S_n' = w_n + w_{n+1} + ... + w_{n+2020}$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

✓ أحسب S_n ، S_n' و P_n بدلالة n.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث☺ (9 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^3+(1-i\sqrt{3})z^2-2\sqrt{3}iz-2-2\sqrt{3}i$.

1) عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-1-i\sqrt{3})(z^2+az+b)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط: A , B , C و D التي لواحقها على الترتيب هي: $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+i\sqrt{3}$ و $z_D=-z_A$.

1) أكتب العددان المركبان: z_A, z_C على الشكل الأسي ، استنتج الشكل الأسي لـكل من z_B ، $\frac{z_A}{z_C}$.

2) أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبريثم على الشكل الأسي ،استنتج طبيعة المثلث OAB.

3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف.

5) عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(E_1): |z+1-i|=|iz-1-i|$$

$$(E_2): Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right)=Arg\left(\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right)+\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

6) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' و الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى D.

a. بين أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z'=iz$.

b. عيّن طبيعة التحويل T و حدد عناصره المميزة.

c. عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالتحويل T.

d. ماذا تستنتج بالنسبة الى النقط A ، B ، D و E.

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح - بن صافية -

الإجابة المقترحة للإختبار الفصل الثاني:

التمرين الأول☺:

I) A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء من الصندوق U.
B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

1) حساب كل من: $P(A)$ و $P(B)$:

$$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{7}{10}\times\frac{A_7^3}{A_{11}^3}=\frac{49}{330}$$

2) استنتاج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء:

(نسميها الحادثة C):قد تكون بيضاء ومن الصندوق U او بيضاء و من الصندوق V.

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{30}+\frac{49}{330}=\frac{60}{330}=\frac{2}{11}$$

4) اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U:

$$P_C(U)=\frac{P(C\cap U)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{11}}=\frac{1\times 11}{30\times 2}=\frac{11}{60}$$

II) نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n \; ; \; n-1 \; ; n-2\}$.

اذا سحبنا كرتان ليستا حمراوتان، يبقى في الكيس n كرة حمراء .
اذا سحبنا كرتان احداهما حمراء، يبقى في الكيس $n-1$ كرة حمراء .
اذا سحبنا كرتان حمراوتان، يبقى في الكيس $n-2$ كرة حمراء .

2) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

$$P(X=n)=\frac{20^2}{(n+20)^2}=\frac{400}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{2(n^1\times 20^1)}{(n+20)^2}=\frac{40n}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{n^2}{(n+20)^2}=\frac{n^2}{n^2+40n+400}$$

X	n	$n-1$	$n-2$
$P(X=x_i)$	$\frac{400}{n^2+40n+400}$	$\frac{40n}{n^2+40n+400}$	$\frac{n^2}{n^2+40n+400}$

3) نضع $n=2$

X	2	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{400}{484}$	$\frac{80}{484}$	$\frac{4}{484}$

✓ **الأمل الرياضياتي :** $E(X)=\frac{2\times 400+1\times 80+0\times 4}{484}=1.8$

✓ **التباين:** $V(X)=\frac{2^2\times 400+1^2\times 80+0^2\times 4}{484}-(1.8)^2=0.23$

✓ **الانحراف:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.23}=0.48$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على ℕ كمايلي:

$$\begin{cases} u_0=0 \; ; \; u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n \end{cases} .$$

نضع : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n\times u_n$.

1) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}=\frac{\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}{\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}=\frac{1}{5}$$

كتابة v_n بدلالة n: لدينا: $v_0=u_1-\frac{1}{5}u_0=1$

منه: $v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

2) أ)تبيان أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5:

$$w_{n+1}-w_n=5^{n+1}\times u_{n+1}-5^n\times u_n$$
$$=5^n\left(5u_{n+1}-u_n\right)$$

لدينا: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ منه: $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{5}u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n$.

اذن:

$$w_{n+1}-w_n=5^n\left(5\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n\right)-u_n\right)$$

$$=5^n\left(5\times\frac{1}{5^n}+u_n-u_n\right)=5$$

ب) كتابة w_n بدلالة n: $w_n=w_0+nr=0+n\times 5=5n$

استنتاج u_n بدلالة n:

- منه: $w_n=5^n\times u_n$ $\quad u_n=\frac{w_n}{5^n}=\frac{5n}{5^n}$.

3) حساب S_n و S_n' و P_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots\dots\dots + w_{n+2020}$$

$$= \frac{n+2020-n+1}{2}\left(w_n + w_{n+2020}\right)$$

$$= \frac{2021}{2}\left(5n + 5(n+2020)\right) = 2021(5n+1010)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots\dots \times v_n$$

و: $= 1\times\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\dots\dots\dots\dots\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1+2+\dots\dots+n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

التمرين الثالث☺

I) $P(z) = z^3 + \left(1-i\sqrt{3}\right)z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a و b :

$P(z) = \left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$:

نجد: $a=2$ و $b=2$

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$:

$z_0 = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_1 = -1+i$ و $z_2 = -1-i$

II) $z_A = -1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 1+i\sqrt{3}$ و $z_D = -z_A$.

1) أكتب العددان المركبان z_A, z_C على الشكل الأسي ، استنتج الشكل الأسي لكل من z_B ، $\frac{z_A}{z_C}$:

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$

و $\frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$.

2) كتابة $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري و الأسي ، ثم استنتاج طبيعة المثلث OAB :

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(-1+i)\times(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -i$ منه: $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$ منه: $OA = OB$ و $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$

منه: $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = -\frac{\pi}{2}$ منه المثلث قائم و متساوي الساقين.

3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) ،$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

4) عين قيم العدد الطبيعي n :

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف معناه: $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

منه:

$$n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\times\left(\frac{2}{-\pi}\right)$$

$$n = -1-2k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^*_-$$

5) تعيين (E_1) و (E_2) :

لدينا: $(E_1): |z+1-i| = |iz-1-i|$ منه:

$(E_1): |z-(-1+i)| = |i(z+i-1)|$

$(E_1): |z-z_A| = |z-z_D|$ تكافيء: $AM = DM$

منه: (E_1) هي محور القطعة المستقيمة $[AD]$.

لدينا:

$(E_2): Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right) = Arg\left(\bar{z}-1+\sqrt{3}i\right) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(\overline{\bar{z}-1+\sqrt{3}i}\right) + \pi + 2k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) + 2k\pi + \pi + 2k\pi$

$(E_2): 2Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \pi + 4k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(E_2): \left(\vec{U};\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

منه: (E_2) هي نصف المستقيم $(CM]$ الموازي لمحور التراتيب ما عدا النقطة C .

6)

أ) تبيان أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z' = iz$:

T يكتب على الشكل: $z' = az + b$ و يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى D منه: $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$ اذن:

$$a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_B} = i \quad \text{و} \quad b = z_B - az_A = 0$$

ب) طبيعة التحويل T و عناصره المميزة :

$a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ منه T دوران زاويته $\theta = Arg(a) = \frac{\pi}{2}$

و مركزه Ω حيث: $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0$.

ت) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D:

$z_E = iz_D$ منه: $z_E = i\left(1-i\right) = i+1$

ث) نستنتج أن النقط A ، B ، D و E تنتمي الى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $R=\sqrt{2}$.